การปริพันธ์ บทที่ 4

Integrate

การหาปริพันธ์หรือที่เรียกว่าการอินทิเกรต (Integration) เป็นกระบวนการตรงข้ามกับการหาอนุพันธ์ (Derivative) โดยที่โจทย์กำหนดอนุพันธ์ของฟังก์ชันมาให้ แต่ต้องการหาฟังก์ชันที่สอดคล้องกับอนุพันธ์นั้น เรียกว่าการหาปฏิยานุพันธ์ (Anti - derivative)

จุดมุ่งหมายการเรียนรู้

1. เข้าใจความหมายของปริพันธ์
2. สามารถหาค่าปริพันธ์ได้
3. สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้อย่างถูกต้อง

4.1 การหาปริพันธ์ในความหมายของปฏิยานุพันธ์

นิยาม ฟังก์ชัน $F(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์หนึ่งของฟังก์ชัน $f(x)$ ถ้า $F'(x) = f(x)$

ตัวอย่าง 4.1 ให้ c เป็นค่าคงที่ใด ๆ

$F(x) = x^3 + c$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = 3x^2$

เนื่องจาก $F'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^3 + c\right) = 3x^2$

เช่น ถ้า $c_1 = 2$; $F_1'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^3 + 2\right) = 3x^2$

ถ้า $c_2 = -5$; $F_2'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^3 - 5\right) = 3x^2$

สรุปได้ว่าปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ มีจำนวนไม่จำกัดขึ้นอยู่กับค่าของ c

ถ้า $F(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ จะได้ว่า $F(x) + c$ จะเป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ ด้วย เนื่องจากว่า

$$\frac{d}{dx}\left(F(x) + c\right) = \frac{d}{dx}\left(F(x)\right) + \frac{d}{dx}c = \frac{d}{dx}\left(F(x)\right) = F'(x) = f(x)$$

กระบวนการหาปริพันธ์ทั้งหมดของ $f(x)$ เรียกว่าการหาปริพันธ์ หรือ การอินทิเกรต และเขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ $\int f(x)\,dx$

$\int$ คือ เครื่องหมายการหาปริพันธ์หรืออินทิกรัล (Integral sign)

$f(x)$ คือ ฟังก์ชันของการหาปริพันธ์

dx คือ สัญลักษณ์ของการหาปริพันธ์เมื่อเทียบกับตัวแปร x

นิยาม ถ้า $F'(x) = f(x)$ หรือ $\frac{d}{dx}(F(x)) = f(x)$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเชิงอนุพันธ์ $d(F(x)) = f(x)dx$ แล้วจะหาปริพันธ์ได้ดังนี้

$$\int f(x)\,dx = \int d(F(x))$$

หรือ $$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$ โดยที่ c เป็นค่าคงที่ใด ๆ

ซึ่งเป็นผลจากการหาปริพันธ์จะต้องบวกค่านี้เสมอทุกครั้ง และเรียกการหาปริพันธ์นี้ว่าเป็นการหาปริพันธ์แบบไม่จำกัดเขต (Indefinite integrals)

ตัวอย่าง 4.2 จงหาปริพันธ์แบบไม่จำกัดเขตของ $3x^2$ หรือ $\int 3x^2 dx$

<u>วิธีทำ</u> จากตัวอย่าง 4.1 $\frac{d}{dx}x^3 = 3x^2$ เขียนอยู่ในรูปเชิงอนุพันธ์ จะได้

$$dx^3 = 3x^2 dx$$

จากนิยาม $$\int 3x^2 dx = \int dx^3$$

$$= x^3 + c$$

4.2 สูตรพื้นฐานของการหาปริพันธ์

ถ้า $F(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และสามารถหาปริพันธ์แบบไม่จำกัดเขตได้ในรูปแบบดังนิยาม $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ แล้ว จะสามารถใช้สูตรในการหาปริพันธ์ได้ดังต่อไปนี้

4.2.1 การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต (Integration of algebraic functions)

ถ้าให้ u และ v เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x และ c เป็นค่าคงที่ใด ๆ

$$\int 0\,du = c$$

$$\int a\,du = a\int du \qquad \text{เมื่อ } a \text{ เป็นค่าคงที่ใด ๆ}$$

$$\int du = u + c$$

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \qquad \text{เมื่อ } n \text{ เป็นค่าคงที่ใด ๆ และ } n \neq -1$$

$$\int (u \pm v)dx = \int u dx \pm \int v dx$$

ตัวอย่าง 4.3 จงหาค่า $\int 0\,dx$

<u>วิธีทำ</u> จากสูตรที่ 1; $u = x$

$$\int 0\,dx = c$$

ตัวอย่าง 4.4 จงหาค่า $\int 5\,dx$

<u>วิธีทำ</u> จากสูตรที่ 2; $a = 5$ และ $u = x$

$$\int 5dx = 5\int dx$$

จากสูตรที่ 3; $u = x$

$$\int 5\,dx = 5x + c$$

ตัวอย่าง 4.5 จงหาค่า $\int x^2\,dx$

<u>วิธีทำ</u> จากสูตรที่ 4; $u = x$ และ $n = 2$

$$\int x^2\,dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + c$$

$$= \frac{x^3}{3} + c$$

หรือ

$$= \frac{1}{3}x^3 + c$$

ตัวอย่าง 4.6 จงหาค่า $\int (3x^2+1)dx$

<u>วิธีทำ</u> จากสูตรที่ 5;

$$\int (3x^2+1)dx = \int 3x^2 dx + \int 1\,dx$$

$$= 3\int x^2 dx + \int dx$$

$$= 3\left(\frac{x^{2+1}}{2+1}\right) + x + c$$

$$= 3\left(\frac{x^3}{3}\right) + x + c$$

$$= x^3 + x + c$$

ตัวอย่าง 4.7 จงหาค่า $\int \left(x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$

<u>วิธีทำ</u>

$$\int \left(x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = \int x^{\frac{3}{2}}dx - \int x^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$(1-u)u^{\frac{1}{2}} = 1\left(u^{\frac{1}{2}}\right) - u\cdot u^{\frac{1}{2}}$$

$$= u^{\frac{1}{2}} - u^{1+\frac{1}{2}}$$

$$= u^{\frac{1}{2}} - u^{\left(1\times\frac{2}{2}\right)+\frac{1}{2}}$$

$$= u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c$$

$$= \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$= \left(x^{\frac{5}{2}} \div \frac{5}{2}\right) - \left(x^{\frac{1}{2}} \div \frac{1}{2}\right) + c$$

$$= \left(x^{\frac{5}{2}} \times \frac{2}{5}\right) - \left(x^{\frac{1}{2}} \times 2\right) + c$$

$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + c$$

$$\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$$

ตัวอย่าง 4.8 จงหาค่า $\int\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}}-4\sqrt{x}+7\sqrt[4]{x^3}\right)dx$

<u>วิธีทำ</u>

$$\int\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}}-4\sqrt{x}+7\sqrt[4]{x^3}\right)dx=\int\left(\frac{2}{x^{\frac{1}{3}}}-4x^{\frac{1}{2}}+7x^{\frac{3}{4}}\right)dx$$

$$=\int\left(2x^{-\frac{1}{3}}-4x^{\frac{1}{2}}+7x^{\frac{3}{4}}\right)dx$$

$$=2\left(\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}\right)-4\left(\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right)+7\left(\frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1}\right)+c$$

$$=2\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right)-4\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)+7\left(\frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}}\right)+c$$

$$=2(3)\frac{x^{\frac{2}{3}}}{2}-4(2)\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3}+7(4)\frac{x^{\frac{7}{4}}}{7}+c$$

$$=3x^{\frac{2}{3}}-\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}+4x^{\frac{7}{4}}+c$$

ตัวอย่าง 4.9 จงหาค่า $\int\frac{3x^5-2x^3+x-4}{x^3}dx$

<u>วิธีทำ</u>

$$\int\boxed{\frac{3x^5-2x^3+x-4}{x^3}}dx=\int\left(3x^2-2+x^{-2}-4x^{-3}\right)dx$$

$$=3\frac{x^{2+1}}{2+1}-2x+\frac{x^{-2+1}}{-2+1}-4\frac{x^{-3+1}}{-3+1}+c$$

$$=3\frac{x^3}{3}-2x+\frac{x^{-1}}{-1}-4\frac{x^{-2}}{-2}+c$$

$$=x^3-2x-x^{-1}+2x^{-2}+c$$

$$=x^3-2x-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+c$$

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{3x^5-2x^3+x-4}{x^3}&=\frac{3x^5}{x^3}-\frac{2x^3}{x^3}+\frac{x}{x^3}-\frac{4}{x^3}\\&=3x^2-2+x^{-2}-4x^{-3}\end{aligned}}$$

ตัวอย่าง 4.10 จงหาค่า $\int x\left(\sqrt{x}+1\right)dx$

<u>วิธีทำ</u>

$$\int x\left(\sqrt{x}+1\right)dx = \int\left(x^{\frac{3}{2}}+x\right)dx$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + \frac{x^{1+1}}{1+1} + c$$

$$= \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{x^{2}}{2} + c$$

$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{x^{2}}{2} + c$$

4.2.2 การหาปริพันธ์โดยการเปลี่ยนตัวแปร (Method of substitution)

วิธีนี้เป็นการเปลี่ยนตัวแปรในโจทย์ จากเดิมในการหาปริพันธ์เทียบกับตัวแปร x หรือในรูปแบบ dx ให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันใหม่เพื่อให้สอดคล้องในการใช้สูตรของการหาปริพันธ์ได้

ตัวอย่าง 4.11 จงหาค่า $\int (x+3)^6 dx$

<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้ $u = x+3$ จะได้ $dy = d(x+3)$

แทนค่า u และ du ในสูตร $\int (x+3)^6 dx = \int u^6 dx$

$$= \frac{u^{7+1}}{7+1} + c$$

$$= \frac{u^{8}}{8} + c$$

แทนค่า $u = x+3$

$$= \frac{(x+3)^8}{8} + c$$

จากตัวอย่าง 4.11 ถ้ากระจายพจน์ $(x+3)^6$ สามารถทำได้ก่อนการหาปริพันธ์แต่ซับซ้อนและใช้เวลามาก จึงมีวิธีการหาโดยวิธีการเปลี่ยนตัวแปรนี้

ตัวอย่าง 4.12 จงหาค่า $\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$

<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้ $u=1-x^2$ จะได้ $x^2=1-u$ และ $\dfrac{du}{dx}=-2x$

ดังนั้น $du=-2xdx$ และ $xdx=\dfrac{du}{-2}$

$$\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx=\int x^3\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$=\int x^2\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}x\,dx$$

$$=\int \boxed{(1-u)u^{\frac{1}{2}}}\frac{du}{-2}$$

$$=\frac{1}{-2}\int(1-u)u^{\frac{1}{2}}du$$

$$=-\frac{1}{2}\int\left(u^{\frac{1}{2}}-u^{\frac{3}{2}}\right)du$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right)+c=-\frac{1}{2}\left(\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{2u^{\frac{5}{2}}}{5}\right)+c$$

$$=-\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{5}u^{\frac{5}{2}}+c=-\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{5}\left(1-x^2\right)^{\frac{5}{2}}+c$$

$$(1-u)u^{\frac{1}{2}}=1\left(u^{\frac{1}{2}}\right)-u\cdot u^{\frac{1}{2}}$$

$$=u^{\frac{1}{2}}-u^{1+\frac{1}{2}}$$

$$=u^{\frac{1}{2}}-u^{\left(1\times\frac{2}{2}\right)+\frac{1}{2}}$$

$$=u^{\frac{1}{2}}-u^{\frac{3}{2}}$$

ตัวอย่าง 4.13 จงหาค่า $\int\dfrac{\ln^2(2x-1)}{(2x-1)}dx$

<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้ $u=\ln(2x-1)$ จะได้ $du=\dfrac{1}{2x-1}d(2x-1)$

และ $du=\dfrac{1}{2x-1}(2)\,dx$ ดังนั้น $\dfrac{du}{2}=\dfrac{dx}{2x-1}$

$$\int\frac{\ln^2(2x-1)}{(2x-1)}dx=\int\frac{(\ln(2x-1))^2}{(2x-1)}dx$$

$$=\int(\ln(2x-1))^2\frac{dx}{(2x-1)}$$

$$=\int u^2\frac{du}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\int u^2du$$

$$\int \frac{\ln^2(2x-1)}{(2x-1)}dx = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{u^3}{3} + c$$
$$= \frac{1}{6}u^3 + c$$
$$= \frac{1}{6}\left(\ln(2x-1)\right)^3 + c$$
$$= \frac{1}{6}\ln^3(2x-1) + c$$

ตัวอย่าง 4.14 จงหาค่า $\int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2}dx$

<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้ $u = \arctan x$ จะได้ $du = \frac{1}{1+x^2}dx$

$$\int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2}dx = \int \frac{(\arctan x)^2}{1+x^2}dx$$
$$= \int (\arctan x)^2 \frac{dx}{1+x^2}$$
$$= \int u^2 du$$
$$= \frac{u^3}{3} + c$$
$$= \frac{(\arctan x)^3}{3} + c$$
$$= \frac{1}{3}\arctan^3 x + c$$

ตัวอย่าง 4.15 จงหาค่า $\int \frac{\log^8 3x}{x}dx$

<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้ $u = \log 3x$ จะได้ $du = \frac{1}{3x}(\log e)dx$

ดังนั้น $\frac{dx}{x} = 3\frac{du}{\log e}$

$$\int \frac{\log^8 3x}{x}dx = \int (\log 3x)^8 \frac{dx}{x}$$
$$= \int u^8 \cdot (3)\frac{du}{\log e}$$
$$= \frac{3}{\log e}\int u^8 du$$

$$\int \frac{\log^8 3x}{x}\,dx = \frac{3}{\log e}\cdot\frac{u^9}{9} + c$$
$$= \frac{1}{3\log e}(\log 3x)^9 + c$$
$$= \frac{\log^9 3x}{3\log e} + c$$

4.2.3 การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันที่ได้ผลลัพธ์เป็นฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

ถ้าให้ u เป็นฟังก์ชันของ x ที่หาอนุพันธ์ได้ โดยที่ c เป็นค่าคงที่ใด ๆ แล้ว

$$\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + c$$
$$\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + c$$
$$\int e^u\,du = e^u + c$$

ตัวอย่าง 4.16 จงหาค่า $\int \frac{1}{x-2}\,dx$

<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้ $u = x-2$ จะได้ $du = d(x-2) = dx$

$$\int \frac{1}{x-2}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du$$
$$= \ln|u| + c$$
$$= \ln|x-2| + c$$

ตัวอย่าง 4.17 จงหาค่า $\int \frac{x^2}{x^3+1}\,dx$

<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้ $u = x^3+1$ จะได้ $du = 3x^2dx$

$$x^2dxdu = \frac{du}{3}$$
$$\int \frac{x^2}{x^3+1}\,dx = \int \frac{1}{x^3+1}x^2dx$$
$$= \int \frac{1}{u}\,\frac{du}{3}$$

$$\int \frac{x^2}{x^3+1}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}du$$
$$= \frac{1}{3}\ln|u| + c$$
$$= \frac{1}{3}\ln|x^3+1| + c$$

ตัวอย่าง 4.18 จงหาค่า $\int \frac{3e^x}{e^x+1}dx$

<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้ $u = e^x + 1$ จะได้ $du = e^x dx$

$$\int \frac{3}{e^x+1}e^x dx = \int \frac{3}{u}du$$
$$= 3\int \frac{1}{u}du$$
$$= 3\ln|u| + c$$
$$= 3\ln|e^x+1| + c$$

ตัวอย่าง 4.19 จงหาค่า $\int \frac{5}{x\ln x}dx$

<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้ $u = \ln x$ จะได้ $du = \frac{1}{x}dx$

$$\int \frac{5}{x\ln x}dx = \int \frac{5}{\ln x}\left(\frac{1}{x}\right)dx$$
$$= 5\int \frac{1}{\ln x}\left(\frac{1}{x}\right)dx$$
$$= 5\int \frac{1}{u}du$$
$$= 5\ln|u| + c$$
$$= 5\ln|\ln x| + c$$

ตัวอย่าง 4.20 จงหาค่า $\int \frac{\ln x+1}{x\ln x}dx$

<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้ $u=\ln x$ จะได้ $du=\frac{1}{x}dx$

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x+1}{x\ln x}dx &= \int \frac{\ln x+1}{\ln x}\left(\frac{1}{x}\right)dx \\ &= \int \frac{u+1}{u}du \\ &= \int \left(\frac{u}{u}+\frac{1}{u}\right)du \\ &= \int \left(1+\frac{1}{u}\right)du \\ &= u+\ln|u|+c \\ &= \ln x+\ln|\ln x|+c\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.21 จงหาค่า $\int \frac{\sin x}{\cos x-1}dx$

<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้ $u=\cos x-1$ จะได้ $du=-\sin x\,dx$

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{\cos x-1}dx &= \int \frac{-1}{u}du \\ &= -\int \frac{1}{u}du \\ &= -\ln|u|+c \\ &= -\ln|\cos x-1|+c\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.22 จงหาค่า $\int \frac{e^{x^{-1}}}{x^2}dx$

<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้ $u=x^{-1}$ จะได้ $du=-x^{-2}dx=-\frac{1}{x^2}dx$

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{x^{-1}}}{x^2}dx &= \int e^{x^{-1}}\frac{1}{x^2}dx \\ &= \int e^u\left(-du\right)\end{aligned}$$

$$\int \frac{e^{x^{-1}}}{x^2}\,dx = -\int e^u\,du$$
$$= -e^u + c$$
$$= -e^{x^{-1}} + c$$

ตัวอย่าง 4.23 จงหาค่า $\int (x-1)e^{x^2-2x+5}\,dx$

<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้ $u = x^2 - 2x + 5$ จะได้ $du = (2x-2)dx = 2(x-1)dx$

$$\therefore \frac{du}{2} = (x-1)dx$$

$$\int (x-1)e^{x^2-2x+5}\,dx = \int e^{x^2-2x+5}\,(x-1)dx$$
$$= \int e^u\,\frac{du}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\int e^u\,du$$
$$= \frac{1}{2}e^u + c$$
$$= \frac{1}{2}e^{x^2-2x+5} + c$$

ตัวอย่าง 4.24 จงหาค่า $\int \frac{5^{\ln x}}{x}\,dx$

<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้ $u = \ln x$ จะได้ $du = \frac{1}{x}dx$

$$\int \frac{5^{\ln x}}{x}\,dx = \int 5^{\ln x}\left(\frac{1}{x}\right)dx$$
$$= \int 5^u\,du$$
$$= \frac{5^u}{\ln 5} + c$$
$$= \frac{5^{\ln x}}{\ln 5} + c$$

ตัวอย่าง 4.25 จงหาค่า $\int \frac{9^{\arctan\sqrt{x}}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$

<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้ $u = \arctan\sqrt{x}$ จะได้

$$du = \frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}dx = \left(\frac{1}{1+x}\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}dx$$

$$\therefore\ 2du = \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$$

$$\int \frac{9^{\arctan\sqrt{x}}}{\sqrt{x}(1+x)}dx = \int 9^{\arctan\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$$

$$= \int 9^u(2)\,du$$

$$= 2\int 9^u\,du$$

$$= 2\frac{9^{\arctan\sqrt{x}}}{\ln 9} + c$$

4.2.4 การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Integration of trigonometric functions)

ถ้าให้ u เป็นฟังก์ชันของ x ที่หาอนุพันธ์ได้ โดยที่ c คือค่าคงที่ใด ๆ

$$\int \sin u\,du = -\cos u + c$$
$$\int \cos u\,du = \sin u + c$$
$$\int \sec^2 u\,du = \tan u + c$$
$$\int \operatorname{cosec}^2 u\,du = -\cot u + c$$
$$\int \sec u \tan u\,du = \sec u + c$$
$$\int \operatorname{cosec} u \cot u\,du = -\operatorname{cosec} u + c$$
$$\int \tan u\,du = \ln|\sec u| + c$$
$$\int \cot u\,du = \ln|\sin u| + c$$
$$\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + c$$
$$\int \operatorname{cosec} u\,du = \ln|\operatorname{cosec} u - \cot u| + c$$

ตัวอย่าง 4.26 จงหาค่า $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$

<u>วิธีทำ</u>

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos x}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) dx$$

$$= \int \sec x(\tan x)\ dx$$

$$= \sec x + c$$

ตัวอย่าง 4.27 จงหาค่า $\int \tan(2x-5)dx$

<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้ $u = 2x-5$ จะได้ $du = 2dx$

$$\therefore dx = \frac{du}{2}$$

$$\int \tan(2x-5)dx = \int \tan u \frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int \tan u du$$

$$= \frac{1}{2}\ln|\sec u| + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln|\sec(2x-5)| + c$$

ตัวอย่าง 4.28 จงหาค่า $\int e^{\sin 3x} \cos 3x\, dx$

<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้ $u = \sin 3x$ จะได้ $du = 3\cos 3x dx$

$$\therefore \frac{du}{3} = \cos 3x dx$$

$$\int e^{\sin 3x} \cos 3x dx = \int e^u \frac{du}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\int e^u du$$

$$= \frac{1}{3}e^u + c$$

$$= \frac{1}{3}e^{\sin 3x} + c$$

ตัวอย่าง 4.29 จงหาค่า $\int \frac{\cos ec^2(1-2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$

<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้ $u = 1-2\sqrt{x}$ จะได้ $du = -\frac{1}{\sqrt{x}}dx$

$$\therefore \quad -du = \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$\int \frac{\cos ec^2(1-2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx = \int \cos ec^2(1-2\sqrt{x})\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$= \int \cos ec^2 u(-du)$$

$$\int \frac{\cos ec^2(1-2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx = -\int \cos ec^2 u du$$

$$= -(-\cot u) + c$$

$$= \cot u + c$$

$$= \cot(1-2\sqrt{x}) + c$$

ในการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติในบางรูปแบบของโจทย์ จะต้องใช้สูตรตรีโกณมิติเบื้องต้นเพื่อแปลงโจทย์ จึงสามารถหาปริพันธ์ได้

$$\sin x \cdot \cos ec\, x = 1$$

$$\cos x \cdot \sec x = 1$$

$$\tan x \cdot \cot x = 1$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sec^2 x - \tan^2 x = 1$$

$$\cos ec^2 x - \cot^2 x = 1$$

ตัวอย่าง 4.30 จงหาค่า $\int (\tan x - 1)^2 dx$

<u>วิธีทำ</u>

$$\int (\tan x - 1)^2 dx = \int (\tan^2 x - 2\tan x + 1) dx$$
$$= \int ((1 + \tan^2 x) - 2\tan x) dx$$
$$= \int (\sec^2 x - 2\tan x) dx$$
$$= \int \sec^2 x dx - 2\int \tan x \, dx$$
$$= \tan x - 2\ln|\sec x| + c$$

$$(\tan x - 1)^2 = (\tan x - 1)(\tan x - 1)$$
$$= (\tan x)\cdot(\tan x) + \tan x(-1)$$
$$+ (-1)\tan x + (-1)(-1)$$
$$= (\tan x)^2 - \tan x - \tan x + 1$$
$$= \tan^2 x - 2\tan x + 1$$

ตัวอย่าง 4.31 จงหาค่า $\int \frac{1}{\sin x - 1} dx$

<u>วิธีทำ</u>

$$\int \frac{1}{\sin x - 1} dx = \int \frac{1}{\sin x - 1} \times \frac{\sin x + 1}{\sin x + 1} dx$$
$$= \int \frac{\sin x + 1}{(\sin x - 1)(\sin x + 1)} dx$$
$$= \int \frac{\sin x + 1}{\sin^2 x - 1} dx$$
$$= \int \frac{\sin x + 1}{-\cos^2 x} dx$$
$$= -\int \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx$$
$$= -\int (\cos x)^{-2} \sin x dx - \int \sec^2 x dx$$
$$= -\int u^{-2}(-du) - \tan x + c$$
$$= \int u^{-2} du - \tan x + c$$
$$= \frac{u^{-1}}{-1} - \tan x + c$$

$$(\sin x - 1)(\sin x + 1) = \sin x \cdot \sin x + \sin x(1)$$
$$+ (-1)\sin x + (-1)(1)$$
$$= (\sin x)^2 + \sin x - \sin x - 1$$
$$= \sin^2 x - 1$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\sin^2 x - 1 = \cos^2 x$$

กำหนดให้ $u = \cos x$ จะได้ $du = -\sin x dx$

$$\therefore \sin x dx = -du$$

$$\int \frac{1}{\sin x - 1}\,dx = -\frac{1}{u} - \tan x + c$$

$$= -\frac{1}{\cos x} - \tan x + c$$

$$= -\sec x - \tan x + c$$

4.2.5 การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันที่จัดอยู่ในรูปแบบ u^2 และ a^2

$u^2 + a^2, u^2 - a^2, a^2 - u^2, \sqrt{u^2 + a^2}, \sqrt{u^2 - a^2}$ **หรือ** $\sqrt{a^2 - u^2}$

โดยที่ u เป็นฟังก์ชันของ x และ a, c คือ ค่าคงที่ใด ๆ ตามสูตรดังนี้

ชุดที่ 1 รูปแบบเป็นตัวหาร (อยู่ด้านล่าง)

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a} + c$$

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + c$$

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + c$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| + c$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + c$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + c$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\,arc\sec\frac{u}{a} + c$$

ชุดที่ 2 รูปแบบเป็นตัวตั้งหาร (อยู่ด้านบน)

$$\int \sqrt{u^2+a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right| + c$$

$$\int \sqrt{u^2-a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + c$$

$$\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a} + c$$

ตัวอย่าง 4.32 จงหาค่า $\int \frac{dx}{x^2+25}$

<u>วิธีทำ</u> จากโจทย์ $u = x$ และ $a = 5$

ดังนั้น $du = dx$

$$\int \frac{dx}{x^2+25} = \boxed{\int \frac{dx}{x^2+(5)^2}}$$

$$\boxed{\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a} + c}$$

$$= \frac{1}{5}\arctan\frac{x}{5} + c$$

ตัวอย่าง 4.33 จงหาค่า $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x - 9}}$

<u>วิธีทำ</u> จากโจทย์ $u = \ln x$ และ $a = 3$

ดังนั้น $du = d(\ln x) = \frac{1}{x}dx$

หรือ $d(\ln x) = \frac{dx}{x}$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x - 9}} = \boxed{\int \frac{d(\ln x)}{\sqrt{(\ln x)^2 - (3)^2}}}$$

$$\boxed{\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + c}$$

$$= \ln\left|\ln x + \sqrt{(\ln x)^2 - (3)^2}\right| + c$$

$$= \ln\left|\ln x + \sqrt{\ln^2 x - 9}\right| + c$$

ตัวอย่าง 4.34 จงหาค่า $\int \sqrt{4-e^{2x}}\ e^x\ dx$

<u>วิธีทำ</u> จากโจทย์ $u = e^x$ และ $a = 2$

ดังนั้น $du = d\left(e^x\right) = e^x dx$

$$\int \sqrt{4-e^{2x}}\ e^x\ dx = \boxed{\int \sqrt{2^2-(e^x)^2}\ d(e^x)}$$

$$\boxed{\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a}+c}$$

$$= \frac{e^x}{2}\sqrt{2^2-\left(e^x\right)^2}+\frac{2^2}{2}\arcsin\frac{e^x}{2}+c$$

$$= \frac{e^x}{2}\sqrt{4-e^{2x}}+2\arcsin\frac{e^x}{2}+c$$

ตัวอย่าง 4.35 จงหาค่า $\int \frac{\operatorname{cosec} x\ \cot x}{1-\operatorname{cosec}^2 x}\ dx$

<u>วิธีทำ</u> จากโจทย์ $u = \operatorname{cosec} x$ และ $a = 1$

ดังนั้น $du = d(\operatorname{cosec} x) - \operatorname{cosec} x\ \cot x\ dx$

หรือ $\operatorname{cosec} x\ \cot x\ dx = -d(\operatorname{cosec} x)$

$$\int \frac{\operatorname{cosec} x\ \cot x}{1-\operatorname{cosec}^2 x}\ dx = \int \frac{\operatorname{cosec} x\ \cot x}{1-(\operatorname{cosec} x)^2}\ dx$$

$$= \int \frac{-d\left(\operatorname{cosec} x\right)}{1^2-\left(\operatorname{cosec} x\right)^2}$$

$$= \boxed{-\int \frac{d\left(\operatorname{cosec} x\right)}{1^2-\left(\operatorname{cosec} x\right)^2}}$$

$$\boxed{\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right|+c}$$

$$= -\frac{1}{2(1)}\ln\left|\frac{1+\operatorname{cosec} x}{1-\operatorname{cosec} x}\right|+c$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\operatorname{cosec} x}{1-\operatorname{cosec} x}\right|+c$$

เนื่องจาก 4 ตัวอย่างที่ผ่านมาข้างต้น รูปแบบของโจทย์สามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบ u^2 และ a^2 ได้อย่างง่ายชัดเจนและไม่ซับซ้อน แต่ถ้าโจทย์กำหนดให้แตกต่างจากเดิม จึงต้องทำการจัดให้อยู่ในรูปแบบดังกล่าวให้ได้ โดยใช้วิธีกำลังสองสมบูรณ์ ดังสูตรต่อไปนี้

<u>ผลรวมทั้งหมดกำลังสอง</u>

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$
$$= aa + ab + ba + bb$$

ดังนั้น $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(หน้า+หลัง)^2 = (หน้า)^2 + 2(หน้า)(หลัง) + (หลัง)^2

หรือให้ง่ายต่อการเขียน (น+ล)^2 = น^2 + 2นล+ ล^2

<u>ผลต่างทั้งหมดกำลังสอง</u>

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$$
$$= aa + a(-b) - ba - b(-b)$$

ดังนั้น $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(หน้า-หลัง)^2 = (หน้า)^2 - 2(หน้า)(หลัง) + (หลัง)^2

หรือให้ง่ายต่อการเขียน (น-ล)^2 = น^2 - 2นล+ ล^2

เช่น ① $x^2 + 2x - 3$ สามารถจัดให้อยู่ในรูป u^2 และ a^2 ได้ โดยใช้สูตรผลรวมทั้งหมดกำลังสอง เนื่องจากเครื่องหมายหน้า $2x$ เป็นลบ

น^2 + 2นล + ล^2

$$x^2 + 2x - 3 = (x)^2 + 2(x)[1] + [1]^2 - [1]^2 - 3$$

มีการบวกเข้าโดยการบังคับจากสูตร จึงต้องทำการ $-[1]^2$

ดังนั้น น = x และ ล = 1

$$x^2 + 2x - 3 = \underbrace{(x)^2 + 2(x)[1] + [1]^2}_{(\text{น} + \text{ล})^2} - 4$$

น^2 + 2นล + ล^2 = (น + ล)

$$= (x+1)^2 - 4$$

$\therefore$ $x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 2^2$ หรืออยู่ในรูปของ $u^2 - a^2$ โดยที่ $u = x+1$ และ $a = 2$

② $4x^2-4x+5$ สามารถจัดให้อยู่ในรูป u^2 และ a^2 ได้ โดยใช้สูตรผลต่างทั้งหมดกำลังสอง เนื่องจากเครื่องหมายหน้า $4x$ เป็นลบ

$$4x^2-4x+5=\underbrace{(2x)^2-2(2x)[1]+[1]^2}_{\text{น}^2\text{ - 2นล + ล}^2}-[1]^2+5$$

มีการบวกเข้า $[1]^2$ โดยการบังคับจากสูตร จึงต้องทำการ $-[1]^2$

ดังนั้น น = $2x$ และ ล = 1

$$4x^2-4x+5=\underbrace{(2x)^2-2(2x)[1]+[1]^2}_{(\text{น - ล})^2}-[1]^2+5$$

$\text{น}^2\text{ - 2นล + ล}^2=(\text{น - ล})^2$

$$=(2x-1)^2+4$$

$$\therefore\ 4x^2-4x+5=(2x-1)^2+2^2$$

หรืออยู่ในรูปของ u^2+a^2 โดยที่ $u=2x-1$ และ $a=2$

③ $8-2x-x^2$ จะต้องทำการจัดเรียงให้ x อยู่ร่วมกัน เพื่อจะได้สามารถจัดให้อยู่ในรูป u^2 และ a^2

$$8-2x-x^2=8-(2x+x^2)$$
$$=8-(x^2+2x)$$

โดยใช้สูตรผลรวมทั้งหมดกำลังสอง เนื่องจากเครื่องหมายหน้า $2x$ เป็นบวก

$$8-(x^2+2x)=8-\{\underbrace{(x)^2+2(x)[1]+[1]^2}_{\text{น}^2\text{ + 2นล + ล}^2}-[1]^2\}$$

มีการบวกเข้า $[1]^2$ โดยการบังคับจากสูตร จึงต้องทำการ $-[1]^2$

ดังนั้น น = x และ ล = 1

$$8-(x^2+2x)=8-\{\underbrace{(x)^2+2(x)[1]+[1]^2}_{(\text{น + ล})^2}-[1]^2\}$$

$\text{น}^2\text{ + 2นล + ล}^2=(\text{น + ล})^2$

$$=8-\{(x+1)^2-1\}=8-(x+1)^2+1$$
$$=9-(x+1)^2$$

$$\therefore\ 8-2x-x^2=3^2-(x+1)^2$$

หรืออยู่ในรูปของ a^2-u^2 โดยที่ $u=x+1$ และ $a=3$

ตัวอย่าง 4.36 จงหาค่า $\int \frac{dx}{(x^2-10x+16)}$

<u>วิธีทำ</u> ทำการแปลง $x^2-10x+16$ ให้อยู่ในรูปผลต่างทั้งหมดกำลังสอง เนื่องจากเครื่องหมายหน้า $10x$ เป็นลบ

น^2 - 2นล + ล^2

$$x^2-10x+16=(x)^2-2(x)[5]+[5]^2-[5]^2+16$$

มีการบวกเข้า $[5]^2$ โดยการบังคับจากสูตร จึงต้องทำการ $-[5]^2$

ดังนั้น น = x และ ล = 5

$$x^2-10x+16=(x)^2-2(x)[5]+[5]^2-25+16$$

$$=(x-5)^2-9$$

(น - ล)^2

น^2 - 2นล + ล^2 = (น - ล)

$$\therefore\ x^2-10x+16=(x-5)^2-3^2$$

หรืออยู่ในรูปของ u^2-a^2 โดยที่ $u=x-5$ และ $a=3$

ดังนั้น $du=d(x-5)=dx$

$$\int \frac{dx}{(x^2-10x+16)}=\int \frac{dx}{(x-5)^2-3^2}$$

$$=\int \frac{d(x-5)}{(x-5)^2-3^2}$$

$$=\frac{1}{2(3)}\ln\left|\frac{(x-5)-3}{(x-5)+3}\right|+c$$

$$=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-8}{x-2}\right|+c$$

ตัวอย่าง 4.37 จงหาค่า $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+10}}$

<u>วิธีทำ</u> ทำการแปลง $4x^2+4x+10$ ให้อยู่ในรูปผลรวมทั้งหมดกำลังสอง เนื่องจากเครื่องหมายหน้า $4x$ เป็นบวก

น^2 + 2นล + ล^2

$$4x^2+4x+10=\underbrace{(2x)^2+2(2x)[1]+[1]^2}-[1]^2+10$$

มีการบวกเข้า $[1]^2$ โดยการบังคับจากสูตร จึงต้องทำการ $-[1]^2$

ดังนั้น น = $2x$ และ ล = 1

$$4x^2+4x+10=(2x)^2+2(2x)[1]+[1]^2-1+10$$

$$=(2x+1)^2+9$$

น^2 + 2นล + ล^2 = (น + ล)^2

(น + ล)^2

$$\therefore\ 4x^2+4x+10=(2x+1)^2+3^2$$

หรืออยู่ในรูปของ u^2+a^2 โดยที่ $u=2x+1$ และ $a=3$

ดังนั้น $du=d(2x+1)=2dx$ $\quad\therefore\ dx=\frac{du}{2}=\frac{d(2x+1)}{2}$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+10}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(2x+1)^2+3^2}}$$

$$=\int\frac{d(2x+1)}{2\sqrt{(2x+1)^2+3^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(2x+1)}{\sqrt{(2x+1)^2+3^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|(2x+1)+\sqrt{(2x+1)^2+3^2}\right|+c$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|(2x+1)+\sqrt{4x^2+4x+10}\right|+c$$

ตัวอย่าง 4.38 จงหาค่า $\int \sqrt{7+6x-x^2}\ dx$

<u>วิธีทำ</u> จะต้องทำการจัดเรียงให้ x อยู่ร่วมกัน

เพื่อจะได้สามารถจัดให้อยู่ในรูป u^2 และ a^2

$$7+6x-x^2 = 7-\left(-6x+x^2\right)$$
$$= 7-\left(x^2-6x\right)$$

โดยใช้สูตรผลต่างทั้งหมดกำลังสอง เนื่องจากเครื่องหมายหน้า $6x$ เป็นลบ

น^2 - 2นล + ล^2

$$7-\left(x^2-6x\right) = 7-\left\{(x)^2-2(x)[3]+[3]^2-[3]^2\right\}$$

มีการบวกเข้า $[3]^2$ โดยการบังคับ จากสูตรจึงต้องทำการ $-[3]^2$

ดังนั้น น = x และ ล = 1

$$7-\left(x^2-6x\right) = 7-\left\{\underbrace{(x)^2-2(x)[3]+[3]^2}_{(\text{น}-\text{ล})^2}-[3]^2\right\}$$

น^2 - 2นล + ล^2 = (น - ล)^2

$$= 7-\left\{(x-3)^2-9\right\} = 7-(x+1)^2+9$$

$$= 16-(x-3)^2$$

$$\therefore\ 7+6x-x^2 = 4^2-(x-3)^2$$

ดังนั้น $\sqrt{7+6x-x^2} = \sqrt{4^2-(x-3)^2}$

หรืออยู่ในรูปของ a^2-u^2 โดยที่ $u = x-3$ และ $a = 4$

$$du = d(x-3) = dx$$

$$\int \sqrt{7+6x-x^2}\ dx = \int \sqrt{4^2-(x-3)^2}\ dx$$

$$= \int \sqrt{4^2-(x-3)^2}\ d(x-3)$$

$$= \frac{(x-3)}{2}\sqrt{4^2-(x-3)^2}+\frac{4^2}{2}\arcsin\left(\frac{x-3}{2}\right)+c$$

$$= \frac{x-3}{2}\sqrt{7+6x-x^2}+8\arcsin\left(\frac{x-3}{2}\right)+c$$

ตัวอย่าง 4.39 จงหาค่า $\int \frac{dx}{x(9\ln^2 x - 24\ln x + 20)}$

<u>วิธีทำ</u> ทำการแปลง $9\ln^2 x - 24\ln x + 20$ ให้อยู่ในรูปผลต่างกำลังสอง เนื่องจากเครื่องหมายหน้า $24\ln x$ เป็นลบ

น^2 - 2 น ล + ล^2

$$9\ln^2 x - 24\ln x + 20 = (3\ln x)^2 - 2(3\ln x)(4) + (4)^2 - (4)^2 + 20$$

น^2 - 2นล + ล^2 = (น - ล)^2

$$= (3\ln x - 4)^2 - 16 + 20$$

$$= (3\ln x - 4)^2 + 4$$

มีการบวกเข้า $[4]^2$ โดยการบังคับ จากสูตรจึงต้องทำการ $-[4]^2$

$$9\ln^2 x - 24\ln x + 20 = (3\ln x - 4)^2 + 2^2$$

หรืออยู่ในรูปของ $u^2 + a^2$ โดยที่ $u = 3\ln x - 4$ และ $a = 2$

ดังนั้น $du = \frac{3}{x}dx$,

$$\therefore \frac{dx}{x} = \frac{du}{3}$$

$$= \frac{d(3\ln x - 4)}{3}$$

$$\int \frac{dx}{x(9\ln^2 x - 24\ln x + 20)} = \int \frac{d(3\ln x - 4)}{3((3\ln x - 4)^2 + 2^2)}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{d(3\ln x - 4)}{(3\ln x - 4)^2 + 2^2}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{3\ln x - 4}{2}\right) + c$$

$$= \frac{1}{6}\arctan\frac{3\ln x - 4}{2} + c$$

ตัวอย่าง 4.40 จงหาค่า $\int \frac{\sqrt{\cos^2 x + 4\cos x - 5}}{\operatorname{cosec} x} dx$

<u>วิธีทำ</u> ทำการแปลง $\cos^2 x + 4\cos x - 5$ ให้อยู่ในรูปผลรวมกำลังสอง
เนื่องจากเครื่องหมายหน้า $4\cos x$ เป็นบวก

น^2 + 2 น ล + ล^2

$$\cos^2 x + 4\cos x - 5 = (\cos x)^2 + 2(\cos x)(2) + (2)^2 - (2)^2 - 5$$

น^2 - 2นล + ล^2 = (น - ล)^2

$$= (\cos x + 2)^2 - 4 - 5$$

$$= (\cos x + 2)^2 - 9$$

มีการบวกเข้า [4]^2 โดยการบังคับ
จากสูตรจึงต้องทำการ $-[4]^2$

$$\cos^2 x + 4\cos x - 5 = (\cos x + 2)^2 - 3^2$$

หรืออยู่ในรูปของ $u^2 - a^2$ โดยที่ $u = \cos x + 2$ และ $a = 3$

ดังนั้น $du = -\sin x\, dx$,

$$du = -\frac{1}{\operatorname{cosec} x} dx$$

$$\frac{dx}{\operatorname{cosec} x} = -du = -d(\cos x + 2)$$

$$\int \frac{\sqrt{\cos^2 x + 4\cos x - 5}}{\operatorname{cosec} x} dx = \int \frac{\sqrt{(\cos x + 2)^2 - 3^2}}{\operatorname{cosec} x}$$

$$= \int \sqrt{(\cos x + 2)^2 - 3^2}\,(-d(\cos x + 2))$$

$$= -\int \sqrt{(\cos x + 2)^2 - 3^2}\, d(\cos x + 2)$$

$$= -\left(\frac{\cos x + 2}{2}\right)\sqrt{(\cos x + 2)^2 - 3^2} - \frac{3^2}{2}\ln\left|\cos x + 2 + \sqrt{(\cos x + 2)^2 - 3^2}\right| + c$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\cos x\right)\sqrt{\cos^2 x + 4\cos x - 5} - \frac{9}{2}\ln\left|\cos x + 2 + \sqrt{\cos^2 x + 4\cos x - 5}\right| + c$$

บทสรุป

การหาปริพันธ์หรือที่เรียกว่าการอินทิเกรตเป็นกระบวนการตรงข้ามกับการหาอนุพันธ์ เรียกว่าการหาปฏิยานุพันธ์ ในบทนี้ได้ใช้สูตรพื้นฐานต่าง ๆ ของการหาปริพันธ์ดังนี้

1. การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต
2. การหาปริพันธ์โดยการเปลี่ยนตัวแปร
3. การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันที่ได้ผลลัพธ์เป็นฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเลขชี้กำลัง
4. การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
5. การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันที่จัดอยู่ในรูปแบบ u^2 และ a^2

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 4

1. จงหาปริพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1.1 $\int \left(4x^3 - 3x^2 + x\right)dx$

1.2 $\int \left(x^{\frac{3}{4}} + 5x - x^{\frac{1}{3}}\right)dx$

1.3 $\int \left(2x^{\frac{2}{3}} - 6\sqrt{x} + 1\right)dx$

1.4 $\int \left(1 + \frac{1}{x}\right)dx$

1.5 $\int \sqrt{x}\left(11\sqrt[3]{x} - 7\sqrt[4]{x} - 1\right)dx$

1.6 $\int \left(\frac{8x^2 + 4\sqrt{x}}{x} - \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$

1.7 $\int \frac{(x+2)}{(x^2 - 4x)^{\frac{1}{3}}}dx$

1.8 $\int x\sqrt{1 - 4x^2}\,dx$

1.9 $\int \frac{x}{\sqrt[3]{(2 - x^2)^2}}dx$

1.10 $\int \frac{1}{\sqrt{2x - 1}}dx$

1.11 $\int \frac{5\ln^4 5x}{x}dx$

1.12 $\int \cos^3 x \cdot \sin x\,dx$

1.13 $\int x\frac{\arcsin x^2}{\sqrt{1 - x^4}}dx$

1.14 $\int \frac{1}{x(\log x)^2}dx$

2. จงหาปริพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

2.1 $\int \frac{2}{3 - x}dx$

2.2 $\int \frac{x^3}{3x^4 + 1}dx$

2.3 $\int \frac{\sec^2 x}{5 - e^{2x}}dx$

2.4 $\int \frac{x^{-1}}{\ln x}dx$

2.5 $\int \frac{\sec^{2x}}{\tan x+1}dx$

2.6 $\int \frac{\cos x}{\sin x-3}dx$

2.7 $\int \frac{3}{(1+x^2)\,arc\cot x}dx$

2.8 $\int (2x-3)^{19}\,dx$

2.9 $\int \frac{\ln^2 x}{x\ln 5}dx$

2.10 $\int \frac{1-x^2}{x-2}dx$

2.11 $\int xe^{(5x^2-1)}\,dx$

2.12 $\int \frac{x^2}{(x^3+4)^4}dx$

2.13 $\int (4x^3+5x-1)^3(8x+5)\,dx$

2.14. $\int \frac{2x^3+3x}{x^4+3x^2-5}dx$

2.15 $\int \sqrt{4x+1}\,dx$

2.16 $\int e^{(e^x+x)}\,dx$

2.17 $\int \frac{1-\sin x}{x+\cos x}dx$

2.18 $\int (2x-3)^{19}\,dx$

2.19 $\int 3^{\cos x}\sin x dx$

2.20 $\int (x-1)e^{x^2-2x+5}\,dx$

3. จงหาปริพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

3.1 $\int x^3\tan(5x^4-1)dx$

3.2 $\int \frac{\cos ec^2 x^{-1}}{x^2}dx$

3.3 $\int \frac{\sin(arc\cot x)}{1+x^2}dx$

3.4 $\int \frac{\cot(\ln x)}{x}dx$

3.5 $\int \sec 5x\,\tan 5x\,dx$

3.6 $\int \frac{\cos(\ln\sqrt{x}-2)}{x}dx$

3.7 $\int e^x\cos ec\,e^x\cot e^x dx$

3.8 $\int \frac{\cos ec\sqrt{x}}{\sqrt{x}\tan\sqrt{x}}dx$

3.9 $\int \frac{\cos x-1}{\sin^2 x}dx$

3.10 $\int \frac{\tan(\arctan 2x)}{1+4x^2}dx$

4. จงหาปริพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

4.1 $\int \frac{dx}{x^2+9}$

4.2 $\int \frac{dx}{\sqrt{16-25x^2}}$

4.3 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-4}}$

4.4 $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx$

4.5 $\int \sqrt{4x^2-9}\,dx$

4.6 $\int \sqrt{3x^2+5}\,dx$

4.7 $\int \frac{\cos 2x}{8-\sin^2 2x}dx$

4.8 $\int \frac{dx}{x(\ln^2 x-1)}$

4.9 $\int \frac{dx}{x^2+10x+30}$

4.10 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+5}}$

4.11 $\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx$

4.12 $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-18x+13}}$

4.13 $\int \frac{dx}{3-12x-4x^2}$

4.14 $\int e^x\sqrt{15-2e^x-e^{2x}}\,dx$

4.15 $\int \frac{\sin x}{4\cos^2 x-16\cos x-9}dx$

เอกสารอ้างอิง

ดำรงค์ ทิพย์โยธา, ยุวรีย์ พันธ์กล้า และณัฏฐนาถ ไตรภพ (2547). **แคลคูลัส 1**. กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

นวลอนงค์ ตันตระกูล. (2543). **แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1**. กรุงเทพมหานคร: ว.เพ็ชรสกุล.

ภิรดี ฤทธิเดช. (2560). **แคลคูลัสพื้นฐาน.** คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลกรุงเทพ.

ราชบัณฑิตยสถาน. (2549). **ศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน**. (พิมพ์ครั้งที่ 9). กรุงเทพมหานคร : ราชบัณฑิตยสถาน.

วิรัตน์ สุวรรณาภิชาติ. (2555). **แคลคูลัส 1.** (พิมพ์ครั้งที่ 4). กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

อรอนงค์ บุญคล่อง. (2557). **แคลคูลัส 1**. (พิมพ์ครั้งที่ 5). กรุงเทพมหานคร : ทริปเพิ้ลเอ็ดดูเคชั่น.

อังสนา จั่นแดง และวิภาวรรณ สิงห์พริ้ง. (2545). **แคลคูลัส 1**. ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี.

อำพล ธรรมเจริญ. (2547). **แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ ตอนที่ 1**. กรุงเทพมหานคร : พิทักษ์การพิมพ์.

William L. Briggs, Denver L. Cochran and Eric L. Schulz. (2013). **Calculus for Scientists and Engineers.** (1st ed.). USA: Pearson Education, Inc.